Dan Seclăman

PROBLEME DE MATEMATICĂ

Clasele IX-XII

EDITURA
CREATOR
BRAȘOV 2023

Cuprins

CAPITOLUL I

CAPITOLUL II

SOLUȚII * INDICAȚII * RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

CAPITOLUL II

CAPITOLUL I

ALGEBRĂ

PROBLEME

"Călătoria de o milă începe cu un pas"
- Lae Tae -

1.1. IDENTITĂȚI ȘI INEGALITĂȚI ALGEBRICE

1.1.1. Să se arate că: $\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{12}(\sqrt{4}+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}$.

(*G.M. nr. 4/1999*, *probl. E:6524*)

1.1.2. Dacă a, b, c sunt numere reale nenule, diferite și $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}=0$, atunci: $\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}=1$.

(*Rev. "Caiet 32"*, *nr. 3/1980*, *probl. E:55*)

1.1.3. Să se arate că dacă $x, y, z, k \in \mathbf{R}^*$ și $xy+yz+zx=k$, atunci

$$\frac{k-xy}{z^2}+\frac{k-yz}{x^2}+\frac{k-zx}{y^2}+3=k\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

1.1.4. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}^*$, astfel încât produsul oricăror două este diferit de 1 și $a+b+c=ab+bc+ca$, atunci:

$$\frac{ab+ac}{b+c-bc}+\frac{bc+ba}{c+a-ca}+\frac{ca+cb}{a+b-ab}=\frac{a+b}{a+b-1}+\frac{b+c}{b+c-1}+\frac{c+a}{c+a-1}.$$

1.1.5. Să se arate că dacă $a+b+c=k$, unde $a, b, c, k \in \mathbf{R}$, atunci:

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1. \quad (a, b, c \neq 0).$$

(*G.M. nr. 5/1977*, *probl. E:5884*)

1.1.6. Să se arate că dacă $a+b+c=abc, (a, b, c \neq 0)$, atunci:

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=ab+bc+ca.$$

(*G.M. nr. 9/1978*, *probl. 17384*)

1.1.7. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$, astfel încât suma pătratelor oricăror două din aceste numere este egală cu 1. Să se arate că:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}=(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-4.$$

1.1.8. Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ satisfac relațiile:

(i) $x+y+z=6;$

(ii) $xy+yz+zx=11;$

(iii) $x^3+y^3+z^3=36,$ atunci $x^7+y^7+z^7=2316.$

1.1.9. Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive de sumă 1, atunci:

1. $ab+bc+ca=abc-\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3-1).$

2. $\left(\frac{a}{bc}+1\right)\left(\frac{b}{ca}+1\right)\left(\frac{c}{ab}+1\right)\geq 64.$

(*R.M.T. nr. 1/1974*, *probl. 1895*)

1.1.10. Dacă a, b, c sunt numere reale și pozitive, atunci:

$$\left(a-\sqrt{ab}+b\right)\left(b-\sqrt{bc}+c\right)\left(c-\sqrt{ca}+a\right)\geq abc.$$

1.1.11. Să se arate că dacă $a>0,\ b>0,\ c>0,$ atunci: $\frac{a}{c}+1\ \frac{b}{a}+1\ \frac{c}{b}+1\ \ 33.$

1.1.12. Dacă a, b, c sunt numere reale și pozitive, să se demonstreze dubla inegalitate: $2abc\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\quad a\ \ bc+b\ \ ca+c\ \ ab\quad ab+bc+ca.$

1.1.13. Dacă $a>0,\ b>0,\ c>0,$ să se demonstreze că:

$$\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

1.1.14. Să se arate că dacă $a>0, b>0, c>0$ și $a+b+c=1,$ atunci avem:

$$a^3+b^3+c^3+6abc\quad a^2+b^2+c^2.$$

(*G.M. nr. 12/1977*, *probl. 16963*)

1.1.15. Dacă $a>1, b>1, c>1,$ atunci să se demonstreze că:

$$\frac{9}{2(a+b+c)}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{a+b+c}{2}.$$ *Generalizare.*

1.1.16. Să se arate că dacă $x>0,\ y>0,\ z>0$ și $x+y+z=1,$ atunci:

a) $\frac{3}{xyz}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1+9xyz}{4xyz};$ b) $xy+yz+zx=1>\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$

(*R.M.T. nr. 1/1975*)

1.1.17. Să se arate că dacă $a>0, b>0, c>0$ și $a+b+c=1,$ atunci:

$$(a+b+3c)(b+c+3a)(c+a+3b)+8(ab+bc+ca+abc)\frac{32}{3}abc.$$

(*G. M. nr. 3/1979*, *probl. 17649*)

1.1.18. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu proprietatea că $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$, să se demonstreze inegalitatea:

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}+2\sqrt{ab}\left(1+\sqrt{c}\right)+2\sqrt{bc}\left(1+\sqrt{a}\right)+2\sqrt{ca}\left(1+\sqrt{b}\right)\geq 1,$$

și să se precizeze cazul de egalitate.

1.1.19. Fie $a_1>0, a_2>0, \ldots, a_n>0$ astfel încât: $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

Să se demonstreze că:

a) $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{n}{a_n}>n\sqrt{n}$; b) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2a_2}+\ldots+\frac{1}{na_n}>\frac{2n}{n+1}$.

1.1.20. Dacă $a,b\in\mathbf{R}$ și $a^4+b^4=1$, să se arate că:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq a^3+b^3\leq\sqrt{a^2+b^2}$$

și să se generalizeze rezultatele.

1.1.21. Fie $a_1\in\mathbf{R}_+^*$, $1=\overline{1,n}$, $n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}$. Să se arate că:

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{2n}\cdot\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i+1\right)^2}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^3}\geq(2n^n)^2.$$

(*O generalizare a problemei 11134*, *G.M.*)

1.1.22. Să se arate că dacă $a_i\in\mathbf{R}$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ și $\sum\limits_{i=1^n}^{n}a_i^2=4p^2$, $p\in\mathbf{R}$, fixat, atunci:

$$-pn(n+1)\leq\sum_{i=1}^{n}1\sqrt{i}\,.\,a_i\leq pn(n+1)$$

și să se precizeze pentru care sistem $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ avem egalitate.

1.1.23. Fie $a_i>0$, $1=\overline{1,n}, n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, cu proprietatea că $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

Să se arate că: $2\leq(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1.1.24. Fie $a_i\geq 0$, $1=\overline{1,n}$, astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=s$. Dacă $m\in\mathbf{R}_+$ și $p\in\mathbf{N}^*$, să se demonstreze că: $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_i+m}\right)^p\geq\frac{s^p}{n^{p-1}(s+m)^p}$.

(*G. M. nr. 9/1980*, *probl. 18429*)

1.1.25. Fie $a_i>0$, $1=\overline{1,n}$ și $0<p\leq q$ astfel încât

$$4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-(p+q)\sum_{i=1}^{n}a_i\right)+(n-1)(p^2+q^2)+2(n+1)qp=0.$$

Să se demonstreze că: $\frac{p}{q(q+1)}\leq\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+pq}\leq\frac{q}{p(p+1)}$.

(*G. M. nr. 9/1979*, *probl. 17919*)

1.1.26. Să se demonstreze că dacă $a\geq b\geq c>0$, atunci:

$$3b(a^2+c^2)\geq a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2)+2abc.$$

(*G. M. nr. 9/1980*, *probl. C*: *52*)

1.1.27. Fie $a_i \geq -1$, $1 = \overline{1,n}$ astfel că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 - n$ unde $n \in \mathbf{N}$ (fixat). Să se determine minimul și maximul expresiei

$$E(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{1 + a_1} + \sqrt{1 + a_2} + \ldots + \sqrt{1 + a_n}.$$

1.1.28. Să se stabilească care dintre numerele 188^{23} și $(23!)^2$ este mai mare.

1.1.29. Se consideră suma:

$$S(x) = 1 + \frac{x(1+x)}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^n(1+x^n)}{1+x^{2n}}, n \in \mathbf{N}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că: $1 \leq \frac{1}{n+1} \cdot S(x) \leq x^{n+1}, (\forall) x \geq 1$.

1.1.30. Să se determine intervalul în care variază numerele reale a_1, $1 = \overline{1,n}$, știind că:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(1 - a_i) \geq 0.$$

1.1.31. Se consideră numerele reale a, b, m, n, p care satisfac relațiile:

$$(i)\, a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 = 2(am + bn);\ (ii)\, 0 < p < m < n.$$

Să se arate că: **1.** $m - p \leq a \leq m + p$; **2.** $n - p \leq b \leq n + p$;

3. $m^2 + n^2 - p\sqrt{m^2 + n^2} \leq am + bn \leq m^2 + n^2 + p\sqrt{m^2 + n^2}$;

4. $m + n - p\sqrt{2} \leq a + b \leq m + n + p\sqrt{2}$.

Să se precizeze și cazurile când avem egalitate.

(*În legătură cu problema 12638, G.M.*)

1.1.32. Să se demonstreze că dacă:

$a^2 + b^2 = p^2$, $c^2 + d^2 = q^2$, unde $a, b, c, d, p, q \in \mathbf{R}$, atunci:

1. $-pq \leq ac + bd \leq pq$; **2.** $-\frac{p^2 + q^2}{2} \leq ab + cd \leq \frac{p^2 + q^2}{2}$;

3. $-p^2q^2 \leq 4abcd \leq p^2q^2$.

1.2. MULȚIMI * ECUAȚIA ȘI FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

1.2.1. Să se determine mulțimea:

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \mid x^2 + 2x - y^2 = p, p \in \mathbf{N}, p + 1 \text{ prim}\}.$$

(*G.M. Nr.2/1981*, *probl. E*: *7143*)

1.2.2. Se consideră mulțimile: $A\{x \in \mathbf{N} \mid x = 7k + 2, k \in \mathbf{N}\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid y = 5m + 9, m \in \mathbf{N}\}$; $C\{z \in \mathbf{N} \mid z = 35p + 9, p \in \mathbf{N}\}$.

Să se arate că $A \cap B = C$.

1.2.3. Fie mulțimile: $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in \mathbf{R}, a \neq \pm 1, \text{ astfel că } x = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right\}$;

$B = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists b \in \mathbf{R}, \text{ astfel că } x = \sqrt{b^2 + 1}\}$.

Să se determine $A \cap B$.

1.2.4. Să se determine mulțimea: $A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \in \mathbf{Z}\right\}$.

1.2.5. Să se determine mulțimea: $M = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \frac{x+a}{x^2+ax+1} \in \mathbf{Z},\, a \in (-1,1) \right\}$.

1.2.6. Fie $m, n, p \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $m > n$ și p număr prim. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \frac{x^m + p}{qx^n} \in \mathbf{Z},\, q \in \mathbf{Z}^*, \text{fixat} \right\}.$$

1.2.7. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Q},\, x = \frac{pn+a}{pn+b}, a, b, p \in \mathbf{Z}\,(\text{fixate}),\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

$$B = \left\{ y \in \mathbf{Q}, y = \frac{qk+c}{qk+d}, c, d, q \in \mathbf{Z}\,(\text{fixate}),\, k \in \mathbf{N} \right\}$$

astfel încât $bc - ad$ este un număr prim impar, iar c.m.m.d.c. al numerelor $p(d-c)$ și $q(a-b)$ este un număr par. Să se demonstreze că mulțimile A și B sunt disjuncte.

(*G.M. nr. 6/1980, probl. C: 42*)

1.2.8. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x + m + 3 = 0,\, m \in \mathbf{R}\};$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 + x + m + 1 = 0,\, m \in \mathbf{R}\}.$$

a) Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ știind că $A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$.

b) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $A \cup B = \emptyset$.

c) Care sunt valorile lui $m \in \mathbf{Z}$ pentru care $A \cap B \neq \emptyset$. Dar dacă $m \in \mathbf{N}$?

d) Să se determine valorile reale ale lui m, știind că mulțimea $A \cup B$ are trei elemente.

e) Care sunt valorile reale ale lui m pentru care mulțimea $A \cup B$ are două elemente? Dar dacă $A \cup B$ are un singur element?

f) Există valori reale ale lui m pentru care $A \cap [0, \infty) = \emptyset$?
Dar dacă $B \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset$?

1.2.9. Se consideră expresia: $F(x) = \dfrac{3x^2 + 2x(a+b+c) + ab + bc + ca}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}^*$(fixate), $x \in \mathbf{R} - \{-a, -b, -c\}$.

1. Să se arate că ecuația $F(x) = 0$ are rădăcini reale.

2. Dacă $x \in \mathbf{N}^*$, să se arate că $F(x) > 3$.

3. Dacă $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, să se determine $\max\limits_{x>1} F(x)$.

1.2.10. Se consideră familia de funcții $f_m(x) = mx^2 + x + 4m + 2$ unde $m \in \mathbf{R}^*$ este un parametru.

1. Să se determine m știind că graficul funcțiilor definite mai sus trece prin punctul de coordonate $A(-1, 1)$ și să se traseze graficul funcției obținute.

2. Notând cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $f_m(x) = m$, să se determine m știind că $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} \leq 1$.

3. Să se găsească locul geometric al vârfurilor parabolelor definite de familia de funcții de mai sus.

1.2.11. Se consideră familia de parabole:

$$f_m(x) = 2x^2 - (2m+1)x + m - 1,\ m \in \mathbf{R}.$$

a) Să se arate că parabolele definite mai sus intersectează axa Ox în două puncte pentru orice $m \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că parabolele date au vârfurile pe parabola de ecuație $y = -2x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$.

c) Să se arate că aceste parabole trec printr-un punct fix care se va determina.

1.2.12. Să se determine parametrul real m, $m \neq -\dfrac{1}{3}$, pentru care vârfurile parabolelor definite prin

$$f_m(x) = (3m+1)x^2 - 2(m+1)x + 1 - m,$$

se găsesc în mulțimea $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

1.2.13. Fie ecuația: $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 7 = 0$, unde m este un parametru real. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației, să se arate că:

$$(3 - x_1)(3 - x_2) \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{17 + 12\sqrt{2}}{2}\right].$$

1.2.14. Se consideră ecuația $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 7 = 0$, $m \in \mathbf{R}$, cu rădăcinile a și b reale.

1. Să se arate că $a, b \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

2. Să se demonstreze inegalitatea: $a^{2n} + b^{2n} \leq 2^{2n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

1.2.15. Să se arate că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, are rădăcinile reale, atunci:

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 \geq b(a + c).$$

1.2.16. Să se demonstreze că pentru orice x real avem:

$$x^4 - 2x^3(\sin x + \cos x) + 3x^2 - 2x(\sin x + \cos x) + 2 \geq 0.$$

1.2.17. Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$, astfel încât:

$$(a \pm b)^2 + (a - c)^2 < c^2.$$

Să se arate că ecuația nu are rădăcini reale.

(*G.M. faza locală*, *jud. Dolj*, *1981*)

1.2.18. Se consideră ecuația $x^2 + ax + a = 0$, unde a este un parametru real astfel încât $4 < a < 5$. Să se determine intervalul în care variază rădăcinile acestei ecuații.

1.2.19. Fie ecuația $x^2 + 2(a-1)x + 1 - 6a = 0$, $a \in \mathbf{N}$. Să se demonstreze că rădăcinile acestei ecuații nu sunt raționale.

1.2.20. Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $a \neq \pm c$. Să se arate că dacă $\dfrac{c}{a} > 0$, $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$, atunci ecuația nu are rădăcini reale.

(*G.M. nr. 7/1978*, *probl. 17287*)

1.2.21. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=[ax^2+bx+c]$, $a, b, c\in\mathbf{Z}$, $a\neq 0$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Să se determine relația dintre coeficienții a, b, c astfel încât graficul funcției f să admită ca punct de extrem, un punct și un segment.

1.2.22. Se consideră funcția de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx$, unde $a>0$ și $b^2<4ac$.
Să se arate că: $f(x)+a\geq\sqrt{f(x+1)\cdot f(x-1)}$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$.

1.2.23. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a>0$ și $b^2-4ac<0$.
Să se demonstreze că oricare ar fi $m\in\mathbf{R}$, există inegalitatea:

$$f(x)>\sqrt{f(x-m)\cdot f(x+m)}-am^2, (\forall)x\in\mathbf{R}.$$

1.2.24. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x)=x^2+ax+1,$$

unde $a\in(-2,2)$. Să se arate că $f(x)+m^2\geq\sqrt{f(x-m)\cdot f(x+m)}$ pentru orice x real și m parametru real.

(*G.M. nr. 2/1980, probl. 18121*)

1.2.25. Să se determine mulțimea de valori pe care o pot lua expresiile:

$$\text{a) } f_1(x)=\frac{mx+1}{x^2+x+2},\ m\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}.$$

$$\text{b) } f_2(x)=\frac{x+a}{x^2+ax+1},\ a\in(-1,1),\ x\in\mathbf{R}.$$

1.2.26. Să se determine mulțimea de valori pe care o poate lua expresia:
$T(x)=(a\cdot\sin x+b\cdot\cos x)(c\cdot\sin x+d\cdot\cos x)$, unde $a, b, c, d\in\mathbf{R}$.

(*G.M. nr. 5/1979, probl. 17748*)

1.2.27. Știind că funcția $f(x)=(1-m)x^2+x+m$, $m\in\mathbf{R}-\{1\}$, are un maxim egal cu 2, să se determine valorile lui $n\in\mathbf{R}$, astfel încât $f(x)+n<0, (\forall)x\in\mathbf{R}$.

1.2.28. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care au loc relațiile:
1. $x^2+x+1=[x+2]$, **2.** $[x]^2-5\cdot[x]+6\leq 0$,
unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

1.2.29. Fie $a, b\in\mathbf{R}$, astfel încât $a-b=1$. Să se arate că: $a^2+2b^2\geq\frac{2}{3}$.

1.2.30. Fie $a, b, c\in\mathbf{R}$ care satisfac relațiile:
(*1*) $a+b-c=1$. (*2*) $ab+2c=3$.
Să se demonstreze că: $a+b\in C_{\mathbf{R}}(-10,2)$ și $ab\in C_{\mathbf{R}}(1,25)$.